Journée d’études thématiques :
Smart Cities, Stockage, Géothermie

Utilisation des fonctions de transfert pour la modélisation du transfert de chaleur dans les murs de bâtiments

Application au calcul des besoins en chaleur et en froid

Eric Dumont
Eric.dumont@umons.ac.be

INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE DE L’UMONS

Contexte

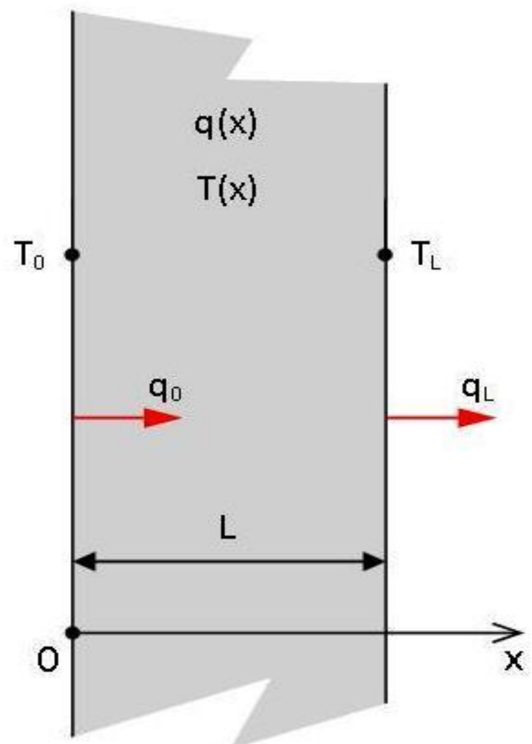
énergie
INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE DE L'UMONS

- Importance du calcul du transfert de chaleur dans les murs pour le calcul des besoins énergétiques des bâtiments
- Utilisation du logiciel TRNSYS (type 56)
- TRNSYS utilise des « fonctions de transfert »

-Méthode rigoureuse ?

-Avantages, limitations ?

Un peu de théorie…



Conduction de chaleur dans un mur modélisée par :

- Loi de Fourier $q = -k \cdot \overline{\nabla} T$
- Premier principe $\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\overline{\nabla} q$

→ Loi de Fourier-Kirchhoff $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho \cdot C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$

• Hypothèses pour la conduction de chaleur dans les murs :

- transfert dans une direction (murs infinis dans les deux autres directions);
- propriétés physiques constantes;
- lors des bilans d'énergie, seuls T(x) et q(x) en x=0 et en x=L sont intéressants.

Un peu de théorie…

INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE
DE L'UMONS

- Pipes (1957) propose une solution de type “quadripôle” dans l’espace de Laplace, et définit une matrice de transfert H(s) pour un mur composé d’un seul matériau :

$$\begin{bmatrix} T_0(s) \\ q_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) & \sqrt{\frac{R}{C\,s}}\sinh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) \\ \frac{\sinh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right)}{\sqrt{\frac{R}{C\,s}}} & \cosh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix}$$

avec

$$R = \frac{1}{k}$$

$$C = \rho \cdot C_p$$

- Si l’inertie du matériau est négligeable (lame d’air, convection) :

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour un mur composé de différents matériaux : $H = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot \ldots \cdot H_n$

Un peu de théorie…

La matrice de transfert H(s) :

$$\begin{bmatrix} T_0(s) \\ q_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) & \sqrt{\dfrac{R}{C\,s}}\sinh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) \\ \dfrac{\sinh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right)}{\sqrt{\dfrac{R}{C\,s}}} & \cosh\left(L\sqrt{R\,C\,s}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} T_0(s) \\ q_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix}$$

peut être réécrite (dét = 1) sous d'autres formes :

$$\begin{bmatrix} T_0(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{A}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{D}{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_0(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{D}{B} & -\dfrac{1}{B} \\ \dfrac{1}{B} & -\dfrac{A}{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

celle qui nous intéresse est appelée matrice G(s) :

$$\begin{bmatrix} q_0(s) \\ q_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{D}{B} & -\dfrac{1}{B} \\ \dfrac{1}{B} & -\dfrac{A}{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

Un peu de théorie…

INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE DE L'UMONS

- Il faut donc trouver la transformée inverse de la matrice G(s)...

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{D(s)}{B(s)} & -\frac{1}{B(s)} \\ \frac{1}{B(s)} & -\frac{A(s)}{B(s)} \end{bmatrix}$$

- Mitalas (1971) note que les températures ne sont jamais connues de manière continue en fonction du temps, mais de manière discrète, chaque valeur étant séparée dans le temps par une période d'échantillonnage Δ :

- il faut donc travailler avec des transformées en z au lieu des transformées de Laplace

- passer d'une transformée à l'autre nécessite une interpolation entre deux valeurs discrètes, que Mitalas choisit linéaire

Un peu de théorie…

énergie
INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE
DE L'UMONS

- Il faut donc maintenant trouver la transformée inverse de la matrice G(z)...
- Mitalas (1971) suppose que les éléments de la matrice G(z) peuvent être

approchés par un quotient de deux polynômes :

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{Num_A(z)}{Den(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_p z^{-p}}$$

- Ensuite, il faut identifier les coefficients a_i et d_i avec la “vraie fonction” A(z)/B(z)
- Cela nécessite, entre autres, la recherche des zéros de B(z)

Un peu de théorie…

énergie
INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE
DE L'UMONS

L'avantage des polynômes en z, c'est qu'ils sont facilement inversés :

$$q_L(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot T_L(z)$$

$$q_L(t) = Z^{-1}\left\{\frac{A(z)}{B(z)}\right\} T_L(t)$$

Le calcul d'un flux de chaleur est alors une simple combinaison linéaire

(à coefficients constants pour Δ donné !) des valeurs précédentes des températures

et des flux :

$$\begin{aligned} q_L(t) = \{&T_L(t)a_0 + T_L(t-\Delta)a_1 + T_L(t-2\Delta)a_2 + \cdots + T_L(t-N\Delta)a_N \\ &- [q_L(t-\Delta)d_1 + q_L(t-2\Delta)d_2 + \cdots + q_L(t-p\Delta)d_p]\} \cdot \frac{1}{d_0}\end{aligned}$$

Un peu de théorie…

La solution complète est :

$$q_0(t) = \sum_{i=0}^{N_b} b_i \cdot T_L(t - i\Delta) - \sum_{j=0}^{N_c} c_j \cdot T_0(t - j\Delta) - \sum_{h=1}^{N_d} d_i \cdot q_0(t - h\Delta)$$

$$q_L(t) = \sum_{i=0}^{N_a} a_i \cdot T_L(t - i\Delta) - \sum_{j=0}^{N_b} b_j \cdot T_0(t - j\Delta) - \sum_{h=1}^{N_d} d_i \cdot q_L(t - h\Delta)$$

Mur monocouche

Cas d’un mur composé d’un seul matériau (béton lourd) :

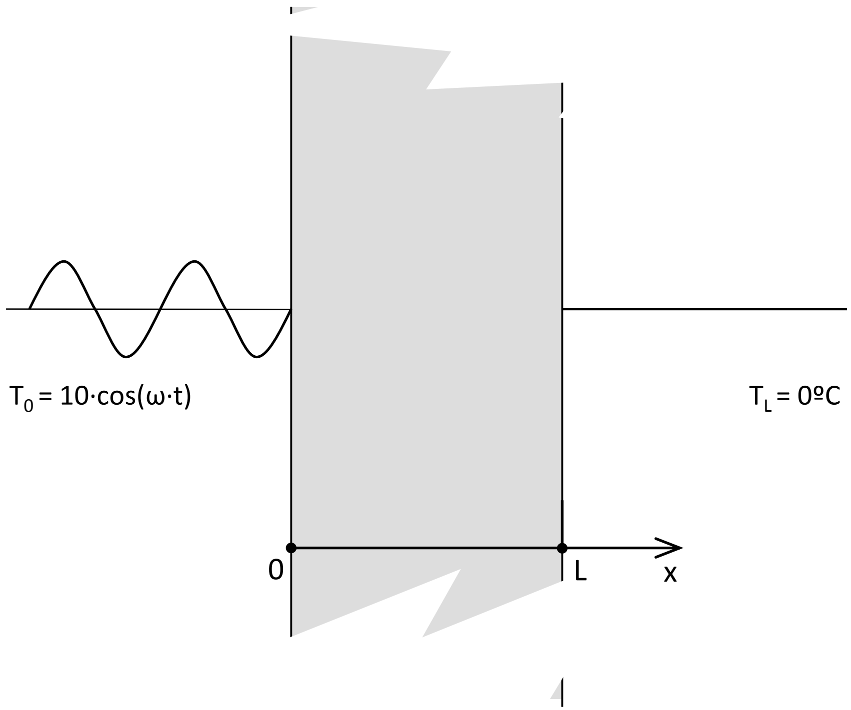
Heavy density wall properties	
Thickness, L	0,203 m
Thermal conductivity, k	7,02 kJ/(h·m·K)
Density, ρ	2240 kg/m³
Specific heat, C_p	0,9 kJ/(kg·K)

	Coefficients for Δ=1h - Heavy density wall							
	TRNSYS				Matlab			
	a	b	c	d	a	b	c	d
0	1,3423604E+02	1,6590755E+00	1,3423604E+02	1,0000000E+00	1,3423604E+02	1,6590755E+00	1,3423604E+02	1,0000000E+00
1	-1,4171487E+02	1,2473125E+01	-1,4171487E+02	-4,7045212E-01	-1,4171487E+02	1,2473125E+01	-1,4171487E+02	-4,7045212E-01
2	2,6852544E+01	4,6355157E+00	2,6852544E+01	1,5713158E-02	2,6852544E+01	4,6355157E+00	2,6852544E+01	1,5713158E-02
3	-5,1838363E-01	8,7786719E-02	-5,1838363E-01	-8,5231741E-06	-5,1838363E-01	8,7786719E-02	-5,1838363E-01	-8,5231741E-06
4	2,0072352E-04	2,6962784E-05	2,0072352E-04		2,0072352E-04	2,6962784E-05	2,0072352E-04	1,3629712E-11
5					-2,5013531E-10	2,6839242E-11	-2,5013531E-10	

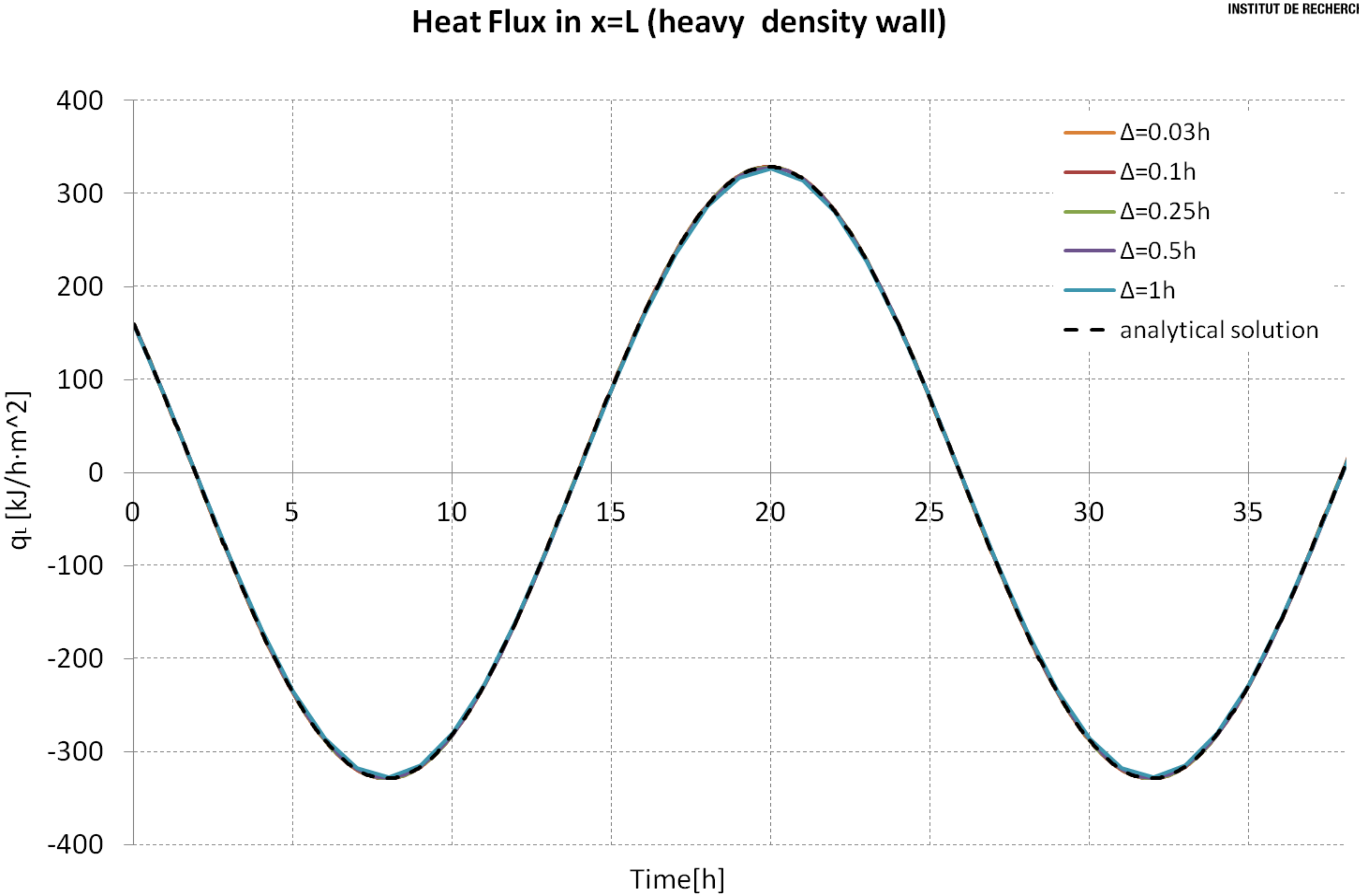
Mur monocouche

- Comparaison de la solution avec la solution analytique
- Température “extérieure” sinusoidale (T=24 h)
- Température “intérieure” constante

Heavy density wall properties	
Thickness, L	0,203 m
Thermal conductivity, k	7,02 kJ/(h·m·K)
Density, ρ	2240 kg/m³
Specific heat, C_p	0,9 kJ/(kg·K)



Mur monocouche



Mur monocouche

énergie
INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE DE L'UMONS

- Quantité de chaleur sur une période

$\dot{q}_L$ [kJ/m^2]	T=24h	T=12h	T=6h	T=3h	T=1h	T=0.5h
analytical	2510,369	1100,881	386,569	97,369	4,267	0,239
Δ=0.03h	2510,356	1100,862	386,542	97,340	4,254	0,237
Δ=0.1h	2510,312	1100,757	386,519	97,581	4,201	0,203
Δ=0.25h	2510,219	1100,255	385,416	97,124	3,837	0,002
Δ=0.5h	2511,475	1098,942	385,154	93,210	1,527	0
Δ=1h	2519,138	1104,075	371,837	49,352	0	0

- Erreur relative

error [%]	T=24h	T=12h	T=6h	T=3h	T=1h	T=0.5h
Δ=0.03h	0,0005	0,0017	0,0071	0,0297	0,3040	1,0943
Δ=0.1h	0,0023	0,0113	0,0130	0,2176	1,5421	14,9551
Δ=0.25h	0,0060	0,0568	0,2983	0,2520	10,0695	99,0066
Δ=0.5h	0,0440	0,1762	0,3659	4,2718	64,2051	100
Δ=1h	0,3493	0,2901	3,8110	49,3146	100	100

Mur monocouche

	Coefficients for Δ=1h - Heavy density wall							
	TRNSYS				Matlab			
	a	b	c	d	a	b	c	d
1	1,3423604E+02	1,6590755E+00	1,3423604E+02	1,0000000E+00	1,3423604E+02	1,6590755E+00	1,3423604E+02	1,0000000E+00
2	-1,4171487E+02	1,2473125E+01	-1,4171487E+02	-4,7045212E-01	-1,4171487E+02	1,2473125E+01	-1,4171487E+02	-4,7045212E-01
3	2,6852544E+01	4,6355157E+00	2,6852544E+01	1,5713158E-02	2,6852544E+01	4,6355157E+00	2,6852544E+01	1,5713158E-02
4	-5,1838363E-01	8,7786719E-02	-5,1838363E-01	-8,5231741E-06	-5,1838363E-01	8,7786719E-02	-5,1838363E-01	-8,5231741E-06
5	2,0072352E-04	2,6962784E-05	2,0072352E-04		2,0072352E-04	2,6962784E-05	2,0072352E-04	1,3629712E-11
6					-2,5013531E-10	2,6839242E-11	-2,5013531E-10	

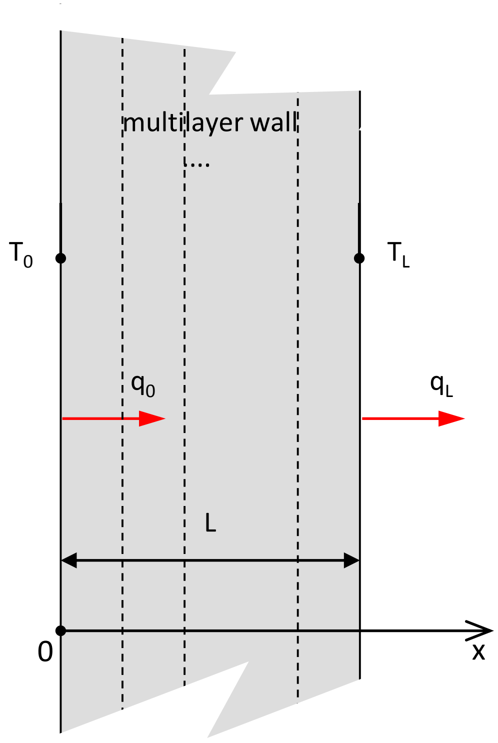
- Le coefficient de transfert en régime stationnaire est :

$$U = \frac{\sum a}{\sum d} = \frac{\sum b}{\sum d} = \frac{\sum c}{\sum d} \qquad U = \frac{k}{L} = 34{,}581\ kJ/(h\ m^2K)$$

	Real	Δ=1h	Δ=0,5h	Δ=0,25h	Δ=0,1h	Δ=0,03h	Δ=0,02h
U	34,5813	34,5813	34,5813	34,5813	34,5813	34,5813	34,5812
$\%U_{real}$	-	100	100	100	100	99,99	99,99

Mur multicouches

Cas d’un mur multicouches



Mur multicouches

MATERIAL	L [m]	k [kJ/(h·m·K)]	C_p [kJ/(kg·h)]	ρ [kg/m^3]
Gypsum board	0,016	0,16	1,09	800
EPS board	0,076	0,03	1,21	43
Heavyweight concrete	0,203	1,95	0,9	2240
EPS board	0,076	0,03	1,21	43
Stucco	0,025	0,72	0,84	1856

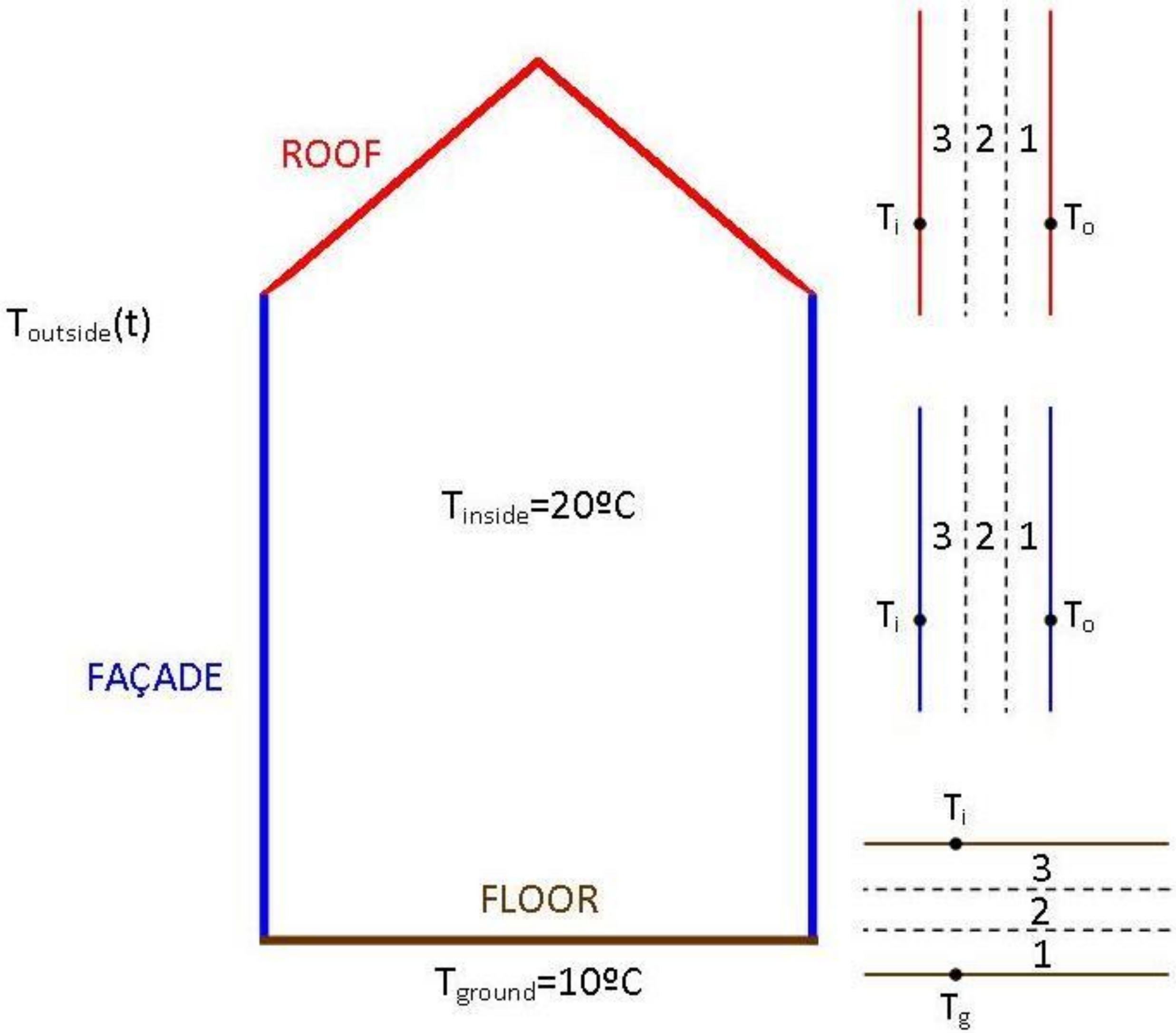
Mur multicouches

énergie
INSTITUT DE RECHERCHE EN ENERGIE DE L'UMONS

- Problème de la précision des zéros de B(z)

	DIFFERENCES BETWEEN AN ACCURACY OF 10^{-07} AND 10^{-15} - ICF wall				
	a	b	c	d	roots
1	5,17E-07	1,78E-05	1,50E-06	0	4,49E-10
2	3,15E-06	4,95E-05	5,02E-06	3,74E-08	1,91E-09
3	5,83E-06	4,89E-05	6,23E-06	5,64E-08	2,55E-07
4	4,38E-06	2,08E-05	3,48E-06	2,00E-08	1,40E-06
5	1,32E-06	3,81E-06	8,14E-07	1,05E-09	6,77E-07
6	1,30E-07	2,81E-07	5,66E-08	6,15E-12	4,95E-06
7	4,94E-09	8,86E-09	1,55E-09	2,02E-13	3,86E-06
8	6,47E-11	1,06E-10	1,60E-11	3,57E-16	1,39E-06
9	1,16E-13	1,86E-13	5,24E-14		4,65E-07
10					2,05E-06
11					2,06E-06
12					2,18E-08
13					6,55E-07
14					3,97E-06
15					4,50E-07
16					8,54E-08

Calcul des besoins

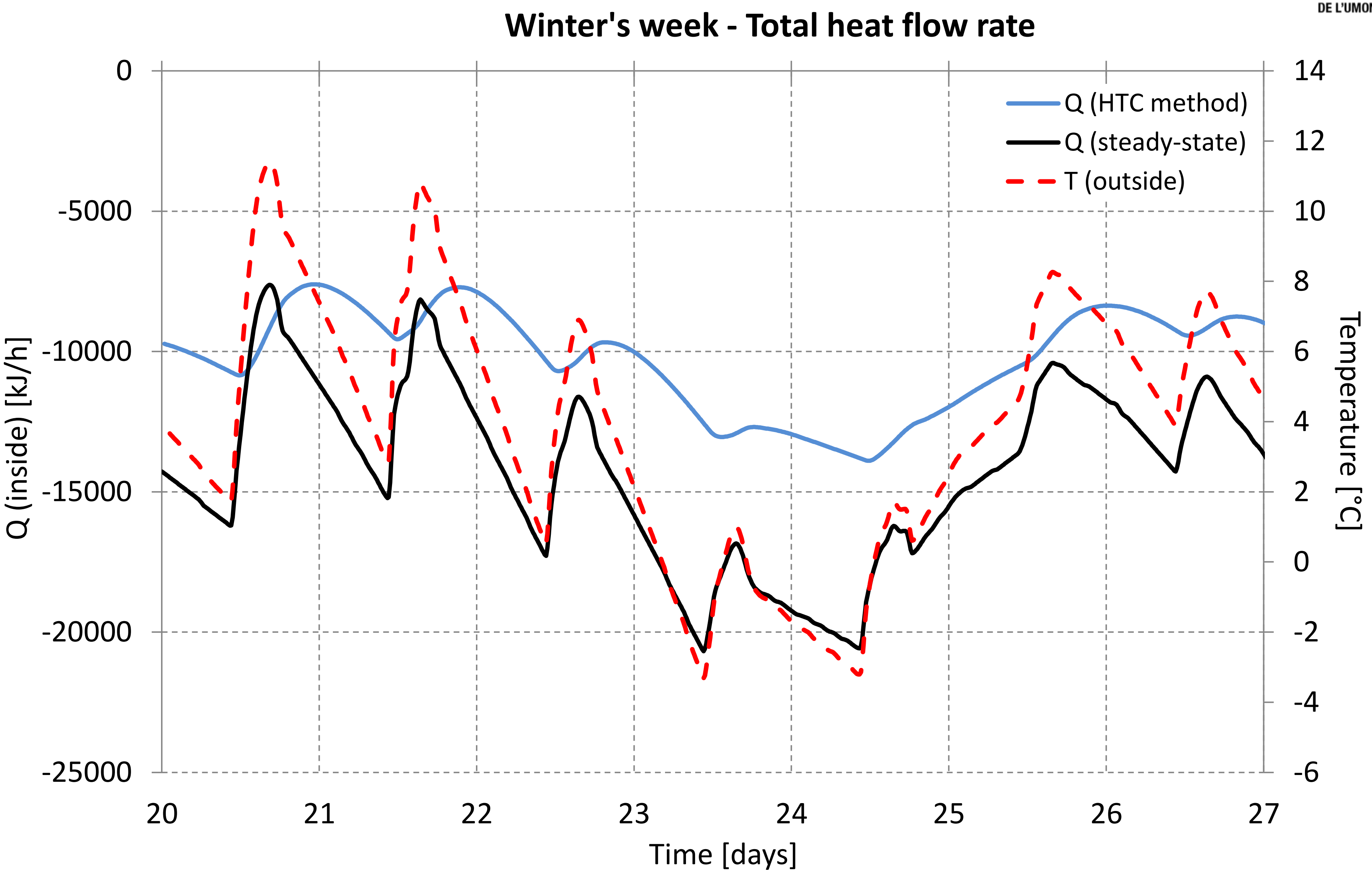


ROOF (131,28 m²)
1) Tiles
2) OSB
3) Mineral wool

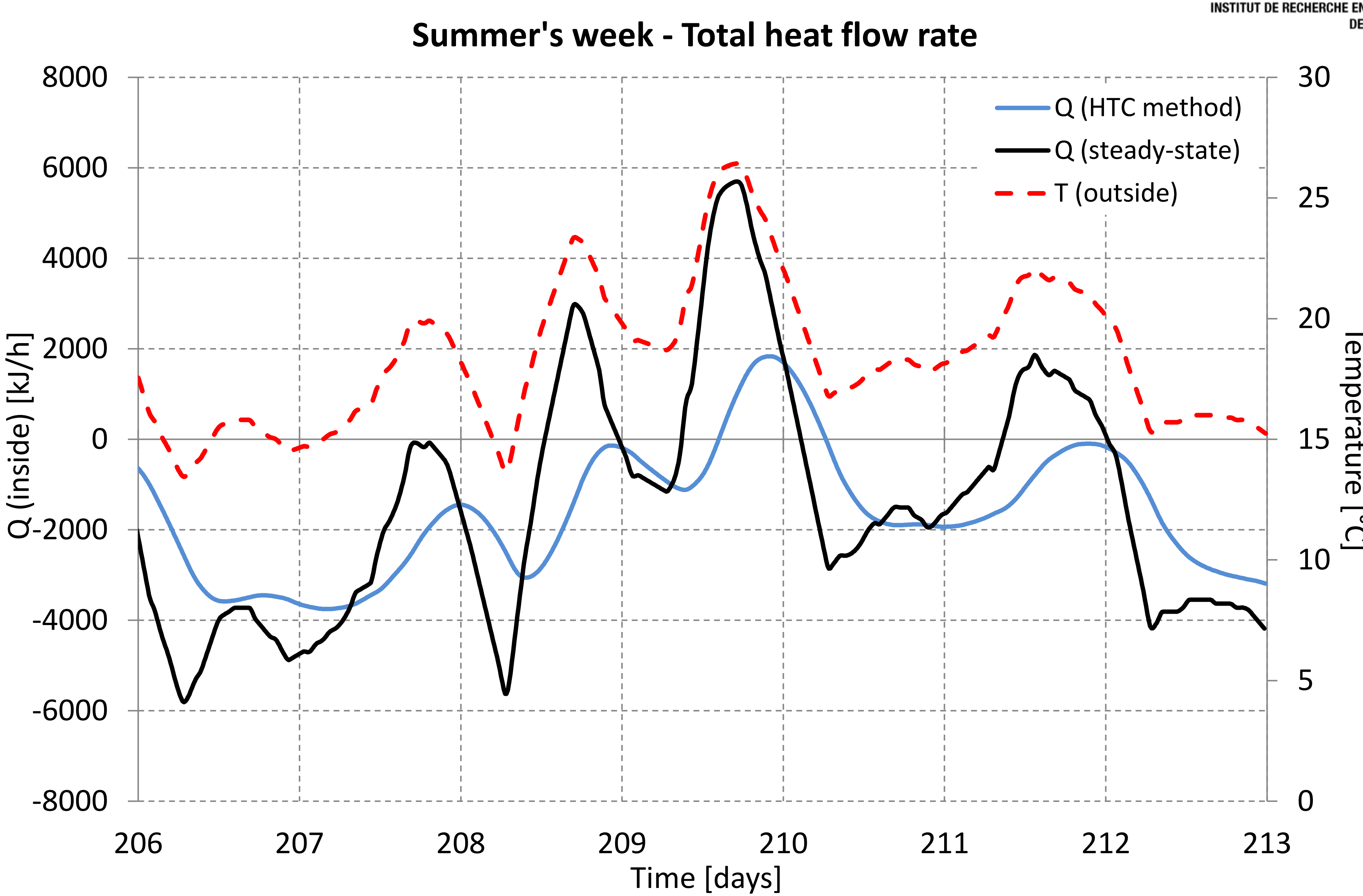
FAÇADE (153,04 m²)
1) Brick
2) EPS
3) Concrete

FLOOR (80,1 m²)
1) Hollow bricks
2) EPS
3) Concrete cover

Calcul des besoins



Calcul des besoins



Avantages

- Solution exacte de l'équation de Fourier
- Les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i pour chaque mur sont calculés une seule fois (en quelques secondes)
- Pour un mur "standard", il y a peu de coefficients (5-10)
- Le calcul des flux de chaleur ne demande que des opérations simples (sommes)
- Si on impose les températures intérieures et extérieures, calcul facile des besoins en chaleur et en froid

Limitations

- Propriétés physiques des murs supposées constantes
- Transfert de chaleur monodimensionnel
- On n’obtient T et q que sur les surfaces intérieures et extérieures d’un mur
- Les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i dépendent de la période d’échantillonage
- Limite sur la période d’échantillonage (1 min environ) due à la précision du logiciel de calcul (nombre de décimales significatives)

Perspectives

- TRNSYS refuse de calculer les coefficients pour des petites périodes d'échantillonage à cause de problèmes dans la méthode de recherche des zéros de B(z) -> à modifier ?
- Comparaison avec d'autres méthodes de calcul des coefficients
- Comparaison de la rapidité de la méthode avec des méthodes numériques classiques (volumes finis, etc.)
- Comment prendre en compte les ponts thermiques ?
- ...